

LNF - 62/114

G. Barbiellini, G. Bologna, G. Diambri and G. P. Murtas:
DISTRIBUZIONE ANGOLARE DELLA BREMSSTRAHLUNG IN
CRISTALLI SOTTILI. -

Nota interna: n. 179
22 Dicembre 1962.

Nota interna: n° 179
22 Dicembre 1962.

G. Barbiellini, G. Bologna, G. Diambrini e G.P. Murtas: DISTRIBUZIONE ANGOLARE DELLA BREMSSTRAHLUNG IN CRISTALLI SOTTILI.
(Angle distribution of thin crystal bremsstrahlung).

ABSTRACT

The aim of this work is to calculate the bremsstrahlung differential cross sections for linearly polarized photons in crystals. From these calculation one can obtain the energy-angle distribution of infinitely thin crystal bremsstrahlung.

As is well known, high energy bremsstrahlung in crystals has very pronounced coherence features, due to the recoil momentum of the nuclei⁽⁴⁾, which have associated wave length of the order of the lattice spacing. In this report only the coherent part of the cross section is calculated. For the continuous part Uberall's calculation⁽³⁾ is valid.

In section 2 we write down May's one atom differential cross section for linearly polarized photons in the case of high energies and small angles. The cross section is differential in the energy of the emitted photon and in the angles between the photon and, respectively, the scattered electron with the primary electron.

It is convenient to express the cross section as a function of q_z and q_\perp , the longitudinal and, respectively, the transverse recoil momentum of the nucleus (q_z and q_\perp are the projections of the recoil momentum parallel and, respectively, perpendicular to the direction of the primary electron) and of the angle θ between the planes passing through the direction of the primary electron and containing the direction of the photon and the recoil momentum of the nucleus, respectively. Further we series expand the cross section in terms of q_\perp^2 and make the reasonable approximation that contributions arise from q_\perp^2 -terms at the utmost. The final result is given by equations (18), (19), which express the sum and the difference of the differential cross section for photons with polarization perpendicular and parallel to the emission plane of the photon. In order to calculate the coherent part of the differential cross section for the whole crystal it is necessary to multiply the calculated cross section by the interference factor of the crystal, which is given in section 3 by equation (22). It contains the Dirac function of the argument $\vec{q} - \vec{g}$, where \vec{g} is a reciprocal lattice vector of the crystal. Thus, as is well known⁽⁴⁾, the coherent part of the differential cross sections for the whole crystal, equation (24), is non vanishing only when the recoil momentum of the nucleus, in suitable units, is coincident with a reciprocal lattice vector.

In section 4 we introduce the essential quantity of the coherence process, i. e., the angle θ between the direction of the primary electron and a crystal axis, and make some transformation in the Dirac function (equation (32)). In this way integration over the scattered electron angles is performed very simply by making the transformation (31) in the differential cross section. Equations (34) and (35) give the coherent part of the cross section for photons polarized perpendicular and parallel to the emission plane of the photon; they are differential in the energy of the photon, and in the emission angles U and ψ_1 of the photon. U is the reduced angle, i. e., the actual emission angle of the photon with respect to the incident electron, times the energy of the electron in units of its rest mass; ψ_1 is the azimuth of the photon. Equation (34) does not contain the differential dU^2 , as it is replaced by summation over \vec{g} -values satisfying equation (33).

Section 5 is devoted to numerical consideration. Diamond at room temperature is considered. In fig. 2 are represented functions strictly related to equation (35), considering only the principal contribution of the reciprocal lattice points, i. e., those points lying in the plane passing through the origin of the reciprocal lattice space.

In fig. 3 are given the bremsstrahlung differential spectrum and its polarization, as given by equation (37) and (36) respectively. They include also the continuous part of the cross section. Each line in figs. 2, 3 is due to the contribution of one or more reciprocal lattice points.

Finally, in section 6 the differential cross section is integrated over the emission angles. Thus the energy spectrum of the photons and its polarization is obtained. These results were already calculated by us by different method and published^(1,2).

2.

1. INTRODUZIONE.

In lavori precedenti abbiamo calcolato lo spettro energetico della bremsstrahlung⁽¹⁾ e la sua polarizzazione lineare⁽²⁾, per elettroni di alta energia in cristalli. La bremsstrahlung in cristalli possiede le ormai ben note caratteristiche di coerenza, che si manifestano sotto forma di picchi nello spettro energetico dei fotoni⁽¹⁾ e nella polarizzazione⁽²⁾.

Scopo del presente lavoro è di calcolare la distribuzione angolare della bremsstrahlung linearmente polarizzata, in cristalli.

Per il calcolo seguiremo il metodo già usato da Uherall^(3,4), con le modifiche dovute al fatto che alle energie alle quali siamo interessati, è necessario tener conto della reale struttura periodica del cristallo, come è già stato da noi indicato in un altro lavoro⁽⁵⁾.

Nel seguito misureremo le energie in unità $mc^2 = 0,51$ MeV (energia di riposo dell'elettrone), gli impulsi in unità mc e le distanze atomiche e del cristallo in unità $\lambda_c = \hbar / mc = (2,43/2\pi) 10^{-2}$ Å (lunghezza d'onda Compton dell'elettrone).

2. LA SEZIONE D'URTO DIFFERENZIALE.

Come è noto⁽⁴⁾, la sezione d'urto differenziale per bremsstrahlung linearmente polarizzata in un monocristallo si ottiene moltiplicando la sezione d'urto differenziale relativa ad un solo atomo per il fattore interferenziale del cristallo.

La sezione d'urto per un solo atomo è stata calcolata da May⁽⁶⁾ in approssimazione di Born ed è differenziale negli angoli dell'elettrone incidente e diffuso e nell'energia del fotone emesso.

A noi interessa scrivere questa nel caso di grandi energie E_1 ed E_2 degli elettroni incidenti e deflessi ($E_{1,2} \gg 1$). In questo caso, come è ben noto, il fotone irradiato e l'elettrone deflesso vengono emessi prevalentemente in avanti, in un piccolo cono avente l'asse nella direzione dell'elettrone incidente, e di semiapertura $1/E_{1,2}$. Potremo quindi sviluppare in serie le funzioni seno e coseno degli angoli dell'elettrone iniziale e finale rispetto al fotone, arrestandoci ai primi termini.

Sempre a causa dei grandi valori di $E_{1,2}$, il campo elettrico dal quale viene deflesso l'elettrone incidente non è un campo coulombiano puro, intervenendo l'effetto schermante degli elettroni atomici. Schiff⁽⁷⁾ ha mostrato che

con buona approssimazione si può assumere un campo coulombiano schermato esponenzialmente. Questo offre il grande vantaggio di poter esprimere analiticamente il fattore di forma atomico; precisamente esso è:

$$F(q, Z) = \frac{1}{1 + \beta q}$$

essendo $\beta = 111Z^{-1/3}$ (Z numero atomico) e q l'impulso trasferito al nucleo.

In queste ipotesi la sezione d'urto differenziale di May per bremsstrahlung linearmente polarizzata nella direzione $\vec{\epsilon}$ si scrive:

$$(1) \quad d\bar{\sigma}_\omega = \frac{\bar{\sigma}}{4\pi^2} \frac{1}{(\beta^2 + q^2)^2} \frac{E_2}{E_1} \left\{ \left[\frac{4E_1 E_2^2 \theta_2 \omega (\phi - \omega)}{1 + \theta_2^2 E_2^2} - \frac{4E_1^2 E_2 \theta_1 \omega \omega}{1 + \theta_1^2 E_1^2} \right]^2 + \frac{4E_1 E_2 k^2 (E_1^2 \theta_1^2 + E_2^2 \theta_2^2 - 2E_1 E_2 \theta_1 \theta_2 \omega \phi)}{(1 + \theta_1^2 E_1^2)(1 + \theta_2^2 E_2^2)} \right\} d\Omega_1 d\Omega_2 \frac{dk}{k}$$

avendo usato più o meno le stesse notazioni di Überall⁽⁴⁾ e cioè:

$$\bar{\sigma} = Z^2 (e^2/\hbar c) (e^2/mc^2)^2 = Z^2 5.78 \cdot 10^{-28} \text{ cm}^2.$$

Z Numero atomico (In approssimazione di Born ad alte energie deve risultare $Z \ll 137$).

$\beta \equiv 111 Z^{-1/3}$. Rappresenta approssimativamente il raggio di schermo.

E_1, E_2 Energia iniziale e finale dell'elettrone che irradia ($E_{1,2} \gg 1$).

\vec{p}_1, \vec{p}_2 Impulso iniziale e finale dell'elettrone.

k, \vec{k} Energia ed impulso del fotone emesso.

$\vec{q} = \vec{p}_1 - \vec{k} - \vec{p}_2$ Impulso trasferito al nucleo.

$\theta_1 = \angle(\vec{p}_1, \vec{k}; \theta_2 = \angle(\vec{p}_2, \vec{k})$ Angoli di \vec{p}_1 e \vec{p}_2 rispetto a \vec{k} ; $\sin \theta_{1,2} \approx \theta_{1,2}$; $\cos \theta_{1,2} = 1 - (\theta_{1,2}^2/2)$.

$\phi = \angle(\vec{p}_1, \vec{k}) (\vec{p}_2, \vec{k})$ Angolo diedro fra i piani (\vec{p}_1, \vec{k}) e (\vec{p}_2, \vec{k}) .

$\omega = \angle(\vec{p}_1, \vec{k}) (\vec{\epsilon}, \vec{k})$ Angolo diedro fra i piani (\vec{p}_1, \vec{k}) ed $(\vec{\epsilon}, \vec{k})$; $\vec{\epsilon}$ è la direzione di polarizzazione.

$d\Omega_1 = \theta_1 d\theta_1 d\phi_1$; $d\Omega_2 = \theta_2 d\theta_2 d\phi_2$. Elementi di angolo solido nelle direzioni \vec{p}_1 e \vec{p}_2 .

4.

Nella (1) gli angoli sono riferiti alla direzione di \vec{k} , mentre da un punto di vista sperimentale la direzione significativa è quella di \vec{p}_1 .

Per introdurre tale direzione di riferimento nella (1), cominciamo col definire gli angoli:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_3 = \angle(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \\ \psi_1 = \angle(\vec{k}, \vec{p}_1) \quad \psi_3 = \angle(\vec{p}_2, \vec{p}_1) \quad (\vec{b}_1, \vec{p}_1) \\ \psi = \psi_3 - \psi_1 = \angle(\vec{p}_2, \vec{p}_1) \quad (\vec{k}, \vec{p}_1) \\ \gamma = \angle(\vec{q}, \vec{p}_1) \quad (\vec{k}, \vec{p}_1) \\ \varphi = \psi_1 + \gamma = \angle(\vec{q}, \vec{p}_1) \quad (\vec{b}_1, \vec{p}_1) \end{array} \right.$$

In queste definizioni \vec{b}_1 rappresenta, per ora un vettore arbitrario.

Tutti gli angoli diedri definiti si intendono orientati.

Per far comparire nella (1) solo quantità legate alla direzione di \vec{p}_1 vi si devono introdurre gli elementi di angolo solido

$$d\Omega_1 = \theta_1 d\theta_1 d\psi_1; \quad d\Omega_3 = \theta_3 d\theta_3 d\psi_3,$$

e vi si faranno comparire le variabili θ_3 e ψ mediante le relazioni (4).

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_2^2 = \theta_1^2 + \theta_3^2 - 2\theta_1\theta_3 \cos \psi \\ \theta_2 \cos \phi = \theta_1 - \theta_3 \cos \psi \\ \theta_2 \sin \phi = \theta_3 \sin \psi \end{array} \right. ,$$

valevoli naturalmente nell'approssimazione di piccoli angoli. Sempre in questa ipotesi si può porre

$$(4) \quad \omega = \chi(\vec{p}_1, \vec{k})(\vec{\varepsilon}, \vec{k}) \simeq \chi(\vec{k}, \vec{p}_1)(\vec{\varepsilon}, \vec{p}_1).$$

Introducendo infine le variabili ridotte

$$(5) \quad \begin{cases} U = \theta_1 E_1 \\ v = \theta_3 E_2 \\ X = \frac{k}{E_1} \end{cases},$$

la sezione d'urto (1) si può scrivere

$$(6) \quad d\sigma_w = \frac{\sigma}{\pi^2} \frac{1}{(\beta^2 + q^2)^2} \frac{(1-x)}{x} dx dU dv^2 d\psi_1 d\psi_2 \cdot \left\{ (A \cos w + B \sin w)^2 + C \right\}$$

Alle variabili A, B, C si possono dare le seguenti forme

$$(7) \quad \begin{cases} A = \frac{E_2 \theta_2}{1 + \theta_2^2 E_2^2} \cos \phi - \frac{\theta_1 E_1}{1 + \theta_1^2 E_1^2} = \frac{(1-x)U - v \cos \psi}{D} - \frac{U}{1+U^2} = \\ = \frac{U - q_L \cos \gamma}{D} - \frac{U}{1+U^2} \\ B = \frac{E_2 \theta_2}{1 + \theta_2^2 E_2^2} \sin \phi = \frac{v \sin \psi}{D} = \frac{q_L \sin \gamma}{D} \\ C = \frac{k \delta (\theta_1^2 E_1^2 + \theta_2^2 E_2^2 - 2\theta_1 \theta_2 E_1 E_2 \cos \phi)}{2(1 + \theta_1^2 E_1^2)(1 + \theta_2^2 E_2^2)} = \frac{k \delta q_L^2}{2(1+U^2)D} \\ D = 1 + \theta_2^2 E_2^2 = 1 + (1-x)^2 U^2 + v^2 - 2(1-x)Uv \cos \psi = \\ = \frac{q_L^2}{\delta} - \frac{(1-x)}{x} q_L^2. \end{cases}$$

La prima forma di A, B, C, D è in funzione di θ_2 e ϕ e perciò non è adatta ai nostri scopi; la seconda forma di A, B, D è in funzione di v e ψ ed è stata ottenuta tenendo presenti

6.

le (3) e (5). La terza forma di A, B, D e la seconda forma di C è stata ottenuta introducendo le proiezioni q_{\perp} e q_z di \vec{q} rispettivamente parallela e perpendicolare a \vec{p}_1 , ed è, come si vede, particolarmente semplice. La convenienza di introdurre variabili dipendenti direttamente da \vec{q} , quali q_z , q_{\perp} e γ (γ è definito dalla penultima delle (2)) apparirà in seguito. Per q_{\perp} e γ si hanno le relazioni

$$(8) \quad \begin{cases} q_{\perp} \sin \gamma = v \sin \gamma \\ q_{\perp} \cos \gamma = u + v \cos \gamma \\ q_{\perp}^2 = u^2 + v^2 + 2uv \cos \gamma \end{cases}$$

essendo $u = xU$ e v rispettivamente le proiezioni di \vec{k} e \vec{p}_2 perpendicolari a \vec{p}_1 .

La terza delle (8) è una conseguenza delle prime due.

Per q_z vale la relazione

$$(9) \quad q_z = \delta + \frac{u^2}{2k} + \frac{v^2}{2E_2} = \delta(1+U^2) - 2\delta U q_{\perp} \cos \gamma + \frac{q_{\perp}^2}{2E_2}$$

essendo

$$\delta = \frac{k}{2E_1 E_2} = \frac{1}{2E_1} \frac{x}{(1-x)}$$

il minimo impulso trasferito al nucleo.

Dalla (6) si ottiene

$$(10) \quad d\delta_{w \pm \frac{\hbar}{2}} = \frac{\delta}{\pi^2} \frac{1}{(s^2 + q^2)^2} \frac{(1-x)}{x} dx dU^2 dv^2 d\gamma d\gamma_3 \cdot [F(w) \pm F(w \pm \frac{\hbar}{2})]$$

essendo

$$(11) \quad \begin{cases} F(w) + F(w \pm \frac{\hbar}{2}) = A^2 + B^2 + 2C \\ F(w) - F(w \pm \frac{\hbar}{2}) = (A^2 - B^2) \cos 2w + 2AB \sin 2w \end{cases}$$

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} A^2 + B^2 &= \frac{q_L^2}{D^2} + \frac{U^2(1+U^2-D)^2}{(1+U^2)^2 D^2} - 2q_L \cos \gamma \frac{U(1+U^2-D)}{(1+U^2) D^2} \\ A^2 - B^2 &= \frac{q_L^2}{D^2} \cos 2\gamma + \frac{U^2(1+U^2-D)^2}{(1+U^2)^2 D^2} - 2q_L \cos \gamma \frac{U(1+U^2-D)}{(1+U^2) D^2} \\ AB &= q_L \sin \gamma \frac{U(1+U^2-D)}{(1+U^2) D^2} - \frac{q_L^2}{D^2} \sin \gamma \cos \gamma \\ 2C &= \frac{k \delta q_L^2}{(1+U^2) D} \end{aligned} \right.$$

La prima delle (11) è indipendente da ω e ci permette di calcolare la sezione d'urto differenziale per fotoni non polarizzati; essa poteva essere ottenuta anche direttamente dalla sezione d'urto differenziale di Bethe e Heitler. La seconda ci interessa perchè ci permetterà di calcolare la polarizzazione della bremsstrahlung.

L'espressione esplicita delle (12) sarebbe piuttosto complicata se non si potessero fare delle ulteriori approssimazioni. Intanto, introduciamovi solo le variabili q_z , q_L e γ . Si eliminerà perciò U , ricavandolo dalla (9):

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} U &= q_L \cos \gamma + R \\ R &= \sqrt{\frac{E}{Z} - 1 + q_L^2 (\cos^2 \gamma - \frac{1}{Z})} \end{aligned} \right.$$

avendo posto

$$(14) \quad \xi = \frac{q_z}{\delta}$$

ed avendo scelto davanti alla radice il segno positivo, perchè quello negativo potrebbe dar luogo ad un valore negativo di U .

Come si vede dalla (10), il valore più probabile di q è $1/B$, che varia, per Z non troppo grandi, con Z da $\sim 10^{-2}$ a $\sim 3 \cdot 10^{-2}$. E' ben noto poi⁽⁴⁾ che q_z è dell'ordine di δ , il quale, alle energie che ci interessano è molto minore di $1/B$. Si conclude che il valore più probabile di q è anch'esso $1/B$. Ad ogni modo valori di $q_L = q > 10^{-1}$ non interessano, come vedremo meglio in seguito. Ne segue che potremo sviluppare in serie di q_L le espressioni che compaiono nelle (12).

8.

Scriveremo ad esempio:

$$(15) \quad U = q_L \cos \gamma + \sqrt{\frac{\xi}{3} - 1} \left\{ 1 + q_L^2 \frac{[\cos^2 \gamma - (1/x)]}{2(\xi - 1)} \right\}$$

$$1 + U^2 - D = 2q_L \cos \gamma \sqrt{\frac{\xi}{3} - 1} + q_L^2 (2 \cos^2 \gamma - 1),$$

e così via, arrestando gli sviluppi in modo da ritenere solo i termini contenenti q_L elevato al massimo al quadrato.

Il valore massimo di q_L^2 si ottiene per $\gamma = 0$ e $\theta_1 = \theta_3$, cioè per $v = (1-x) u/x$; esso è dunque, per le (8), (9), (14),

$$(16) \quad q_{L \text{ Max}}^2 = x (\xi - 1) \left[1 + \frac{x}{1-x} \right]$$

Si vede quindi che per $\xi = 1$ la (15) dà lo stesso risultato della (13) (e cioè $U = 0$). Per $\xi \neq 1$ l'errore della (15) è minore del 3% fintanto che

$$\frac{q_L^2 |\cos^2 \gamma - (1/x)|}{\xi - 1} < \frac{1}{2} ;$$

per la (16) si vede che questa disuguaglianza è tanto meglio verificata quanto più x è piccolo.

Mediante gli sviluppi effettuati si ottiene:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} A^2 - B^2 = \frac{q_L^2}{\xi^2} (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) - 4 q_L^2 \cos^2 \gamma \frac{(\xi - 1)}{\xi^4} \\ A^2 + B^2 + 2C = (1 + kd) \frac{q_L^2}{\xi^2} - 4 q_L^2 \cos^2 \gamma \frac{(\xi - 1)}{\xi^4} \\ AB = q_L^2 \sin \gamma \cos \gamma \frac{(\xi - 2)}{\xi^3} \end{array} \right.$$

Definiamo ora con $d\delta_{\parallel}$ e $d\delta_{\perp}$ le sezioni d'urto differenziali per fotoni aventi il vettore di polarizzazione $\vec{\epsilon}$ rispettivamente parallelo e perpendicolare al piano di emissione (\vec{R} , \vec{P}_1).

In base alla definizione (4) risulta

$$d\delta_{\parallel} = d\delta_0 = d\delta_{\pi}$$

$$d\delta_{\perp} = d\delta_{\frac{\pi}{2}} = d\delta_{-\frac{\pi}{2}}$$

Quindi per le (10), (11), (17), si ottiene:

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{k}{\sigma} d\delta &= \frac{k}{\sigma} (d\delta_{\parallel} + d\delta_{\perp}) = \left\{ [1 + (1-x)^2] \Psi_1(\delta, \varrho_2, \varrho_L^2, \gamma) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3}(1-x) \Psi_2(\delta, \varrho_2, \varrho_L^2, \gamma) \right\} dk dV^2 d\varphi_1 d\varphi_3 \\ \frac{k}{\sigma} (d\delta_{\perp} - d\delta_{\parallel}) &= 2(1-x) \Psi_3(\delta, \varrho_2, \varrho_L^2, \gamma) dk dV^2 dv^2 d\varphi_1 d\varphi_3 \end{aligned} \right.$$

avendo posto

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \Psi_1(\delta, \varrho_2, \varrho_L^2, \gamma) &= \frac{1}{2\pi^2} \frac{\varrho_L^2}{(\beta^2 + \varrho^2)^2} \frac{1}{\xi^2} \\ \Psi_2(\delta, \varrho_2, \varrho_L^2, \gamma) &= \frac{1}{2\pi^2} \frac{\varrho_L^2}{(\beta^2 + \varrho^2)^2} 12 \cos^2 \gamma \frac{(\xi - 1)}{\xi^4} \\ \Psi_3(\delta, \varrho_2, \varrho_L^2, \gamma) &= -\frac{1}{2\pi^2} \frac{\varrho_L^2}{(\beta^2 + \varrho^2)^2} \left[\frac{1}{\xi^2} (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) - 4 \cos^2 \gamma \frac{(\xi - 1)}{\xi^4} \right] \end{aligned} \right.$$

Per il seguito ci sarà utile definire anche le sezioni d'urto differenziali $d\delta_{\parallel b, p_1}$ e $d\delta_{\perp b, p_1}$ per fotoni aventi polarizzazione rispettivamente parallela e perpendicolare al piano (\vec{b}_1, \vec{p}_1) ; per la (4) si ottiene

$$d\delta_{\parallel b, p_1} = d\delta_{\varphi_1} = d\delta_{\varphi_1 + \pi}$$

$$d\delta_{\perp b, p_1} = d\delta_{\varphi_1 \pm \frac{\pi}{2}}$$

e per le (10), (11), (17) si ottiene

$$(20) \quad \frac{k}{\sigma} (d\delta_{\perp b, p_1} - d\delta_{\parallel b, p_1}) = 2(1-x) \Psi_4(\delta, \varrho_2, \varrho_L^2, \gamma) dk dV^2 dv^2 d\varphi_1 d\varphi_3$$

avendo posto

$$(21) \quad \Psi_4(\delta, \varrho_2, \varrho_L^2, \gamma) = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{\varrho_L^2}{(\beta^2 + \varrho^2)^2} \left[\frac{1}{\xi^2} \cos 2\varphi - 4 \cos^2 \gamma \cos 2\varphi_1 \frac{(\xi - 1)}{\xi^4} + 2 \sin 2\gamma \sin 2\varphi_1 \frac{(\xi - 1)}{\xi^3} \right]$$

essendo Ψ già stato definito dall'ultima delle (2).

10.

3. IL FATTORE INTERFERENZIALE DEL CRISTALLO.

Indichiamo con \vec{g} un generico vettore del reticolo inverso del cristallo bersaglio, definito in modo che le componenti g_j ($j = 1, 2, 3$) di \vec{g} su un sistema di assi ortogonali di riferimento \vec{b}_j , non necessariamente coincidenti con gli assi fondamentali del reticolo inverso, siano della forma

$$g_j = \frac{2\pi}{a_j} h_j \quad (h_j \text{ numero intero}),$$

essendo a_j delle quantità che misurano la periodicità lungo gli assi \vec{b}_j ; le a_j sono in semplice relazione con gli spigoli della cella fondamentale del reticolo. Il fattore interferenziale del cristallo si scrive allora (4), (1):

$$(22) \quad F_c = e^{-Aq^2} \frac{(2\pi)^3}{\Delta} N_0 \sum_{g_1, g_2, g_3} |S|^2 \delta(q_1 - g_1) \delta(q_2 - g_2) \delta(q_3 - g_3) + N(1 - e^{-Aq^2}),$$

essendo q_j la proiezione di \vec{q} su \vec{b}_j e $\delta(q_j - g_j)$ la funzione di Dirac dell'argomento $q_j - g_j$. N rappresenta il numero di atomi del cristallo; N_0 il numero di celle fondamentali del cristallo, Δ il volume della cella fondamentale, S il fattore di struttura di Bragg (8), ed A lo spostamento quadrato medio di un atomo dalla propria posizione di equilibrio dovuto alle vibrazioni termiche e definito da Uberall (4). Ad esempio per un cristallo tipo diamante, il reticolo è costituito dalla sovrapposizione di un reticolo cubico semplice di passo reticolare a , di altri tre reticoli ottenuti dal primo con una traslazione della quantità $a/2$, $a/2$ lungo ciascuna coppia di spigoli del cubo iniziale (e questo costituisce un reticolo cubico a facce centrate), più infine altri quattro reticoli cubici semplici che formano nel loro complesso un altro reticolo cubico a facce centrate ottenibile dal primo con una traslazione della quantità $a/4$, $a/4$, $a/4$ lungo i suoi spigoli. Per questo reticolo si ottiene allora:

$$N_0 = N/8 \quad ; \quad \Delta = a^3$$

Il fattore di struttura di Bragg per un cristallo tipo diamante è dato da (9)

$$S = 1 + \exp\left[2\pi i \left(\frac{n_1 + n_2}{2}\right)\right] + \exp\left[2\pi i \left(\frac{n_2 + n_3}{2}\right)\right] + \\ + \exp\left[2\pi i \left(\frac{n_3 + n_1}{2}\right)\right] + \exp\left[2\pi i \left(\frac{n_1 + n_2 + n_3}{4}\right)\right] +$$

$$\begin{aligned}
 & + \exp \left[2\pi i \left(\frac{n_1+n_2+n_3}{4} + \frac{n_1+n_2}{2} \right) \right] + \exp \left[2\pi i \frac{n_1+n_2+n_3}{4} + \right. \\
 (23) \quad & \left. + \frac{n_2+n_3}{2} \right] + \exp \left[2\pi i \left(\frac{n_1+n_2+n_3}{4} + \frac{n_3+n_1}{2} \right) \right] = \\
 & = \left\{ 1 + \exp \left[\pi i (n_1+n_2) \right] + \exp \left[\pi i (n_2+n_3) \right] + \right. \\
 & \left. + \exp \left[\pi i (n_3+n_1) \right] \right\} \left\{ 1 + \exp \left[\frac{\pi}{2} i (n_1+n_2+n_3) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

In questa espressione n_ℓ ($\ell = 1, 2, 3$) rappresenta un numero intero in generale distinto da h_j , in quanto gli assi \vec{b}_j sono in generale distinti dagli assi fondamentali del cubo.

Ciascun addendo della (23) corrisponde ad uno degli otto reticoli cubici semplici che costituiscono il reticolo del diamante.

Per quanto riguarda i valori di a_j per il diamante si hanno diverse possibilità; come esempio assumiamo

$$a) \quad \vec{b}_1 \equiv [100] \quad \vec{b}_2 \equiv [010] \quad ; \quad \vec{b}_3 \equiv [001]$$

(cioè gli assi di riferimento coincidono con quelli fondamentali del diamante). Risulta allora $a_1=a_2=a_3=a$

$$b) \quad \vec{b}_1 \equiv [110] \quad \vec{b}_2 \equiv [001] \quad ; \quad \vec{b}_3 \equiv [1\bar{1}0]$$

Risulta $a_1=a_3=a/\sqrt{2}$; $a_2=a$

$$c) \quad \vec{b}_1 \equiv [111] \quad ; \quad \vec{b}_2 \equiv [1\bar{1}0] \quad ; \quad \vec{b}_3 \equiv [11\bar{2}]$$

$$\vec{b}_1 \equiv [111] \quad ; \quad \vec{b}_2 \equiv [01\bar{1}] \quad ; \quad \vec{b}_3 \equiv [\bar{2}11]$$

$$\vec{b}_1 \equiv [111] \quad ; \quad \vec{b}_2 \equiv [10\bar{1}] \quad ; \quad \vec{b}_3 \equiv [1\bar{2}1]$$

Risulta $a_1=\sqrt{3}a$; $a_2=a/\sqrt{2}$; $a_3=a/\sqrt{6}$

La struttura del piano reticolare passante per l'origine e perpendicolare all'asse $[110]$, per il diamante; è riportata in rif. bibl. (1).

Moltiplicando le (18) per la (22) si ottengono le sezioni d'urto differenziali per tutto il cristallo. Come è noto, il primo termine della (22) dà luogo, per la sezione d'urto, ad un contributo "interferenziale" o "coerente" mentre il secondo dà luogo ad un contributo "continuo" od "incoerente". Quest'ultimo è già stato calcolato da Uberall⁽³⁾

e di esso non ci occuperemo.

Il contributo interferenziale alle sezioni d'urto differenziali $d\sigma_{\parallel, \perp}^{(i)}$ per tutto il cristallo si ottiene dunque dalle formule:

$$(24) \quad \frac{k}{\sigma N} [d\sigma_{\perp}^{(i)} \pm d\sigma_{\parallel}^{(i)}] = \frac{k}{\sigma} (d\sigma_{\perp} \pm d\sigma_{\parallel}) e^{-Aq^2} \frac{(2\pi)^3}{\Delta} \cdot \frac{N_0}{N} \sum_{\vec{g}} |s|^2 \delta(\vec{q} - \vec{g}).$$

La (24) esprime il ben noto fatto che la sezione d'urto è diversa da zero solo quando l'impulso trasferito al nucleo \vec{q} coincide con uno dei vettori del reticolo inverso \vec{g} .

La presenza nella (24) del fattore $e^{-Aq^2} / (\beta^2 + q^2)^2$ ha come conseguenza la rapida decrescita della sezione d'urto all'aumentare di q . Poichè i valori di A variano fra 100 e 300, è legittimo assumere, come abbiamo detto indietro, che i valori di q che contribuiscono alle (19) siano minori di 10^{-1} .

4. INTEGRAZIONE DELLA SEZIONE D'URTO DIFFERENZIALE.

Poichè è nostra intenzione ricavare la distribuzione angolare della bremsstrahlung, quando l'elettrone deflesso non viene osservato, è necessario integrare la (24) su tutto l'intervallo di variabilità di ν^2 e ψ_3 . Questo lo si può ottenere molto semplicemente se si fanno comparire tali variabili come argomento delle funzioni di Dirac⁽¹⁰⁾. In tal modo si eliminano due funzioni di Dirac. Per eliminare anche la terza, faremo comparire U^2 nel suo argomento, e poi integreremo su un intervallo infinitesimo di U^2 .

In tal modo otterremo la sezione d'urto relativa agli intervalli infinitesimi dk , dU^2 , $d\psi_1$, ed ai valori k , U^2 , ψ_1 ; cioè otterremo quella che fisicamente ha il significato di sezione d'urto differenziale in k , U^2 , ψ_1 , (anche se non conterrà dU^2).

Esprimiamo dunque q_j in funzione di U , ν , ψ_3 . Definiamo intanto:

$$(25) \quad \theta = \angle \vec{p}_1, \vec{b}_1,$$

cioè l'angolo formato fra l'asse \vec{b}_1 del reticolo inverso e l'impulso dell'elettrone primario. I valori significativi di θ , che è l'angolo essenziale del fenomeno di coerenza, sono minori di 0.1 rad⁽⁴⁾; quindi faremo anche per esso l'approssimazione dei piccoli angoli già considerata al n.2.

Definiamo poi:

$$(26) \quad \alpha = \angle(\vec{b}_2, \vec{b}_1) (\vec{p}_1, \vec{b}_1)$$

cioè l'angolo diedro (orientato) formato dai piani individuati da \vec{b}_1, \vec{b}_2 e \vec{b}_1, \vec{p}_1 .

Infine specializziamo il vettore arbitrario che interviene nella definizione di ψ_1, ψ_3 e ψ (cfr. le (2)), prendendolo coincidente con l'asse \vec{b}_1 dello spazio del reticolo inverso.

Nella fig. 1 è rappresentato il vettore \vec{p}_1 nello spazio $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$, relativamente al caso $\alpha = 0$. Nella stessa figura sono rappresentati i vari angoli ed il vettore \vec{q} ; $OF = q_2$ rappresenta la sua proiezione su \vec{p}_1 ; OD rappresenta la proiezione di \vec{q} sul piano \vec{b}_2, \vec{b}_3 , che, per piccoli valori di θ , come stiamo considerando, coincide approssimativamente con q_{\perp} .

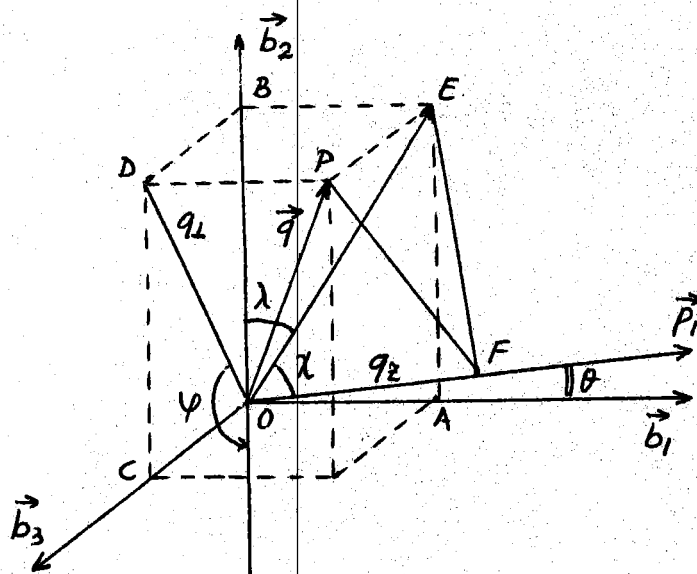


FIG. 1 - Rappresentazione di \vec{q} e \vec{p}_1 nello spazio del reticolo inverso.

$$OP = \vec{q}; \quad OA = q_1; \quad OB = q_2; \quad OC = q_3;$$

$$OD = q_{\perp}; \quad OF = q_2; \quad \theta = \angle(\vec{p}_1, \vec{b}_1); \quad \alpha = \angle(\vec{b}_1, \vec{b}_2) (\vec{b}_1, \vec{p}_1) = 0$$

$$\psi = \angle(\vec{q}, \vec{p}_1) (\vec{b}_1, \vec{p}_1); \quad \chi = \angle(OE, \vec{p}_1); \quad \lambda = \angle(OE, \vec{b}_2).$$

14.

Dalla figura si ha:

$$q_2 = \overline{OE} \cos \chi = \overline{OE} \sin(\theta + \lambda) = \overline{OE} (\theta \cos \lambda + \sin \lambda) = \\ = \overline{OE} \left(\theta \frac{q_2}{\overline{OE}} + \frac{q_1}{\overline{OE}} \right) = q_1 + \theta q_2 .$$

Si ha poi immediatamente:

$$q_2 = q_{\perp} \cos(\pi - \psi) = -q_{\perp} \cos \psi \\ q_3 = q_{\perp} \sin(\pi - \psi) = q_{\perp} \sin \psi ,$$

essendo ψ definito dall'ultima delle (2).

Se poi si ha $\alpha \neq 0$, è sufficiente operare una rotazione di assi dell'angolo α attorno all'asse \vec{b}_1 , per riportarci al caso precedente. In questo caso si ottiene:

$$q_2 = -q_{\perp} \cos \psi \cos(-\alpha) + q_{\perp} \sin \psi \cos\left[\left(-\pi/2\right) - \alpha\right] \\ q_3 = -q_{\perp} \cos \psi \cos\left[\left(\pi/2\right) - \alpha\right] + q_{\perp} \sin \psi \cos(-\alpha) .$$

In definitiva si ha:

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} q_1 = q_2 + \theta q_{\perp} \cos \psi \\ q_2 = -q_{\perp} \cos(\psi - \alpha) \\ q_3 = q_{\perp} \sin(\psi - \alpha) \\ \sin \psi = \frac{-q_2 \sin \alpha + q_3 \cos \alpha}{q_{\perp}} \\ \cos \psi = -\frac{q_2 \cos \alpha + q_3 \sin \alpha}{q_{\perp}} \end{array} \right.$$

Tenendo presente le (8) e le definizioni di ψ e φ nelle (2), le prime tre delle (27) si possono anche scrivere:

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} q_1 = q_2 + \theta (x U \cos \varphi_1 + v \cos \varphi_3) \\ q_2 = -[x U \cos(\varphi_1 - \alpha) + v \cos(\varphi_3 - \alpha)] \\ q_3 = x U \sin(\varphi_1 - \alpha) + v \sin(\varphi_3 - \alpha) . \end{array} \right.$$

Siamo in grado ora di far comparire le variabili v^2 , φ_3 ed U^2 nell'argomento delle funzioni di Dirac. Si ottiene (11)³.

$$(29) \quad \partial(q_1 - q_2) = \frac{\partial(\varphi_3 - \alpha)}{|\theta v \sin \varphi_3|}$$

essendo

$$\Omega = + \arccos \left[\frac{g_1 - g_2 - \theta \times U \cos \psi_1}{\theta v} \right]$$

Si ha poi:

$$(30) \quad \partial(q_2 - g_2) = \left| 2 E_2 \theta \cos \alpha \right| \delta(v^2 - v'^2)$$

essendo:

$$v^2 = 2 E_2 \left[g_1 + \theta (g_2 \cos \alpha + g_3 \sin \alpha) - \delta - \frac{\times U^2}{2 E_1} \right]$$

Poichè nella (30) compare v^2 , v può assumere anche valori negativi; perciò daremo a ψ_3 solo valori positivi. Per questa ragione nella (29) non abbiamo considerato il termine $\delta(\psi_3 + \Omega)$.

Si ha infine:

$$\partial(g_3 - g_3) = \left| \frac{2 U v \sin \psi_3}{\times R \cos \alpha} \right| \delta(U^2 - \Lambda^2)$$

essendo R dato dalla (13) ed essendo Λ^2 il valore U^2 che si ottiene dalle (13) per $\vec{q} = \vec{g}$, cioè, in base alle (27), per

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} q_1^2 = g_2^2 + g_3^2 \\ q_2 = g_1 + \theta (g_2 \cos \alpha + g_3 \sin \alpha) \\ \gamma = \psi - \psi_1 \\ \cos \psi = \frac{g_2 \cos \alpha + g_3 \sin \alpha}{\sqrt{g_2^2 + g_3^2}} \\ \sin \psi = \frac{-g_2 \sin \alpha + g_3 \cos \alpha}{\sqrt{g_2^2 + g_3^2}} \end{array} \right.$$

In definitiva si ha:

$$(32) \quad \partial(\vec{q} - \vec{g}) = \frac{2}{\delta} \left(1 + \frac{|q_1 \cos \gamma|}{R} \right) \partial(\psi_3 - \Omega) \partial(v^2 - v'^2) \partial(U^2 - \Lambda^2),$$

che è da sostituire nella (24). Sviluppando in serie $q_1 \cos \gamma / R$ nel solito modo e tenendo conto delle (18), (19), si vede che il termine che contiene $|q_1 \cos \gamma| / R$ contiene anche q_1 elevato ad una potenza maggiore di 2 e quindi si trascura.

L'integrazione della (24) su ψ_3 da 0 a π , su v^2 da 0 a ∞ e in U^2 in un intervallo infinitesimo si effettua immediatamente (10) sostituendo nelle (18) ψ_3, v^2 e U^2 rispettivamente con Ω, V^2 e Δ^2 . Tenendo presente che queste condizioni esprimono il fatto che la sezione d'urto è diversa da zero solo se $\vec{q} \equiv \vec{g}$, tali sostituzioni equivalgono ad operare nelle (19) le sostituzioni (31). E' la particolare semplicità dei calcoli da effettuare con queste sostituzioni che ci ha indotto ad esprimere la sezione d'urto in funzione delle variabili q_2, q_3 e γ .

L'integrazione su un intervallo infinitesimo intorno al valore U^2 è ottenuta facendo sì che nella (24) le somme su \vec{g} siano effettuate solo su quei valori di g_j che soddisfano alla relazione

$$(33) \quad U = -g_2 \cos(\psi_1 - \alpha) + g_3 \sin(\psi_1 - \alpha) + \\ + \sqrt{\frac{g_1 + \theta(g_2 \cos \alpha + g_3 \sin \alpha)}{\delta} - 1 + [-g_2 \cos(\psi_1 - \alpha) + g_3 \sin(\psi_1 - \alpha)]^2 - \frac{g_2^2 + g_3^2}{X}}$$

che si ottiene dalle (13), (14), tenendo presenti le (31).

In definitiva le parti coerenti delle sezioni d'urto, differenziali negli angoli di emissione del fotone e nell'energia del fotone, sono date, per le (24), (18), (19), (32), (31), da:

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{k}{\sigma N} [d\delta_{\perp}^{(i)} + d\delta_{\parallel}^{(i)}] &= \frac{k}{\sigma N} d\delta^{(i)} = \left\{ [1 + (1-x)^2] \phi_1(U, \psi_1, \theta, \delta) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3} \phi_2(U, \psi_1, \theta, \delta) \right\} dk d\psi_1 \\ \frac{k}{\sigma N} [d\delta_{\perp}^{(i)} - d\delta_{\parallel}^{(i)}] &= 2(1-x) \phi_3(U, \psi_1, \theta, \delta) dk d\psi_1, \end{aligned} \right.$$

dove, ricordiamo, gli indici \perp e \parallel stanno ad indicare che la polarizzazione è perpendicolare o, rispettivamente, parallela al piano (\vec{k}, \vec{p}_1) , e dove si ha:

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} \phi_1(U, \psi_1, \theta, \delta) &= \frac{8\pi}{\Delta} \frac{N_0}{N} \sum_{\vec{g}} |S|^2 \frac{e^{-Ag^2}}{(\beta^2 + g^2)^2} \frac{\delta(g_2^2 + g_3^2)}{[g_1 + \theta(g_2 \cos \alpha + g_3 \sin \alpha)]^2} \\ \phi_2(U, \psi_1, \theta, \delta) &= \frac{96\pi}{\Delta} \frac{N_0}{N} \sum_{\vec{g}} |S|^2 \frac{e^{-Ag^2}}{(\beta^2 + g^2)^2} [-g_2 \cos(\psi_1 - \alpha) + \\ &\quad + g_3 \sin(\psi_1 - \alpha)]^2 \frac{\delta^2 [g_1 + \theta(g_2 \cos \alpha + g_3 \sin \alpha) - \delta]}{[g_1 + \theta(g_2 \cos \alpha + g_3 \sin \alpha)]^4} \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
 \phi_3(U, \psi, \theta, \delta) &= -\frac{8\pi}{1} \frac{N_0}{N} \sum_g |S|^2 \frac{e^{-Ag^2}}{(\beta^2 + g^2)^2} \\
 (35) \quad & \left\{ \frac{\delta [(g_2^2 - g_3^2) \cos(2\psi - 2\alpha) - 2g_2 g_3 \sin(2\psi - 2\alpha)]}{[g_1 + \theta(g_2 \cos \alpha + g_3 \sin \alpha)]^2} - \right. \\
 & \left. - 4[-g_2 \cos(\psi - \alpha) + g_3 \sin(\psi - \alpha)]^2 \frac{\delta^2 [g_1 + \theta(g_2 \cos \alpha + g_3 \sin \alpha) - \delta]}{[g_1 + \theta(g_2 \cos \alpha + g_3 \sin \alpha)]^4} \right\}
 \end{aligned}$$

Nelle (34) il differenziale dU^2 è sostituito con la sommatoria su quei valori di g_j che soddisfano alla (33).

5. RISULTATI NUMERICI.

Nelle (35) il contributo principale alla sommatoria proviene dagli addendi aventi $g_1 = 0$. In altri termini, alla sezione d'urto contribuisce essenzialmente solo il piano reticolare passante per l'origine. Questo lo si può vedere qualitativamente nel seguente modo. Dalle (19) si vede che il massimo della sezione d'urto si ha per $q_z = \delta$ ($\frac{x}{\beta} = 1$) e $q = 1/\beta$. Per i piccoli valori di θ e δ ai quali siamo interessati solo il piano $g_1 = 0$ soddisfa a queste condizioni, e la sezione d'urto raggiunge effettivamente il massimo.

Gli altri piani reticolari contribuiscono con punti per i quali, se $q = 1/\beta$, risulta $q_z \gg \delta$ e viceversa, se $q_z = \delta$, risulta $q \gg 1/\beta$. Queste considerazioni sono tanto più avvalorate in quanto in realtà le (19) devono essere moltiplicate per $\exp(-Aq^2)$ (cfr. le (35)).

Il contributo dei piani $g_1 \neq 0$ comincia a farsi sentire nella parte alta dello spettro, dove $\delta \gg 0$. In questo caso valgono qualitativamente le considerazioni di Überall(4). Nel seguito considereremo pertanto $g_1 = 0$.

Nelle (35) eseguiremo quindi le sommatorie solo su quei valori di g_2, g_3 che soddisfano alla (33) con $g_1 = 0$. Per specificare questo indicheremo le funzioni (35) col simbolo $\phi_{1,2,3}(U, \psi, \theta, \delta)$.

Tali funzioni dipendono dal rapporto:

$$\tau = \theta/\delta$$

e non da θ e δ separatamente, purchè nella (33) si trascuri il termine $(g_2^2 + g_3^2)/x$, ciò che è lecito per $\beta^2 x \gg 1$.

Dalla (35) si ha che per $g_1 = 0$ ed $U = 0$, risulta:

$$(g_2 \cos \alpha + g_3 \sin \alpha) \tau = 1 ;$$

in questo caso ψ_1 è indefinito e la terza delle (35) cade in difetto, come fisicamente è giustificato dal fatto che la polarizzazione del fotone è riferita al piano di emissione (\vec{k}, \vec{p}_1) del fotone, che in questo caso è indeterminato. Intenderemo che la terza delle (35) sia ancora valida per $U = 0$, scegliendo $\psi_1 = 0$, cioè riferendo la polarizzazione al piano fisso (\vec{b}_1, \vec{p}_1) .

Le prime due delle (35) mantengono la loro validità anche per $U = 0$, ed, in particolare, risulta $\delta\phi_2^0 = 0$.

Le funzioni $\delta\phi_{1,2,3}^0$ sono state calcolate con il calcolatore IBM 1620, in funzione dei vari parametri.

In fig. 2 riportiamo alcuni dei numerosi calcoli effettuati, relativi al diamante, a temperatura ambiente, per il quale valgono le considerazioni del n.3.

Si è assunto

$$N_0/N = 1/8$$

$$A = 126$$

$$a/2\pi = 147$$

$$B = 61.1$$

$$\vec{b}_1 \equiv [110], \quad \vec{b}_2 \equiv [001], \quad \vec{b}_3 \equiv [1\bar{1}0].$$

La scelta del diamante è particolarmente conveniente nei riguardi delle proprietà di coerenza.

Nella fig. 2 le funzioni $\delta\phi_{1,2,3}^0$ sono riportate in funzione di τ , con parametri α, U, ψ_1 .

Definiamo polarizzazione dei fotoni la quantità:

$$(36) \quad P = \frac{d\sigma_{\perp}^{(i)} - d\sigma_{\parallel}^{(i)}}{d\sigma^{(i)} + [d\sigma^{(c)}/dU^2]},$$

nella quale $d\sigma_{\perp}^{(i)}$, $d\sigma_{\parallel}^{(i)}$, $d\sigma^{(i)}$ sono date dalle (34), mentre $d\sigma^{(c)}$ è la parte continua della sezione d'urto differenziale, data da Uberall⁽³⁾.

Nella (36) la polarizzazione è riferita al piano di emissione (\vec{k}, \vec{p}_1) , tranne nel caso di angolo di emissione nullo ($U = 0$), nel quale caso essa è riferita al piano (\vec{b}_1, \vec{p}_1) .

In fig. 3 riportiamo in alcuni casi lo spettro differenziale di bremsstrahlung, cioè la quantità

$$(37) \quad \frac{k \{d\sigma^{(i)} + [d\sigma^{(c)}/dU^2]\}}{N_0 dk d\psi_1},$$

ottenuta tramite le (34), (35) ed i valori di $d\sigma$ (c) calcolati con le formule di Uberall; nella stessa figura è riportata anche la polarizzazione (36). Queste quantità sono rappresentate in funzione dell'energia frazionaria dei fotoni $x = k/E_1$, per elettroni di 1 GeV ($E_1 \approx 2000$), con parametri $\theta, \alpha, U, \psi_1$.

Tutte le quantità che abbiamo riportato fino ad ora sono relative alla situazione ideale in cui un fascio di elettroni di sezione infinitamente piccola e privo di divergenza angolare urti un cristallo così sottile, che ogni elettrone che irradia abbia subito uno scattering multiplo trascurabile.

In ogni riga delle figg. 2,3 si riconosce il contributo di uno o più punti del reticolo inverso. La situazione è resa geometricamente evidente se si adattano a questo caso le considerazioni di Uberall. Se si considera la cinematica del processo di bremsstrahlung si vede che attualmente il disco luogo degli estremi degli impulsi di rinculo dei nuclei di cui si parla nel rif. bibl. (4), si riduce ad una superficie sensibilmente piana e perciò l'intersezione col piano reticolare passante per l'origine è con buona approssimazione una retta che si sposta in questo piano al variare di θ e δ . L'equazione di questa retta si ricava dalla (33). Dunque nelle (35) le sommatorie su \vec{g} vanno effettuate su quei punti del piano $g_{\perp} = 0$ che appartengono a questa retta. Poiché ciò avviene solo per determinati valori di θ o δ , si comprende così la genesi delle righe.

6. LO SPETTRO ENERGETICO DEI FOTONI.

Dalle (20), (21), integrando su ψ_3 e ν^2 con procedimento analogo al n. 4, si ottiene:

$$(38) \quad \frac{k}{8N} [d\sigma_{Ib,p}^{(i)} - d\sigma_{IIb,p}^{(i)}] = 2(1-x)\phi_4(U, \psi_1, \theta, \delta) dk d\psi_1$$

essendo

$$(39) \quad \phi_4(U, \psi_1, \theta, \delta) = -\frac{8\pi}{\Delta} \frac{N_0}{N} \sum_{\vec{g}} |S|^2 \frac{e^{-\lambda g^2}}{(\beta^2 + g^2)^2} \left\{ \frac{\delta [(g_2^2 - g_3^2) \cos 2\alpha + 2g_2 g_3 \sin 2\alpha]}{[g_1 + \theta(g_2 \cos \alpha + g_3 \sin \alpha)]^2} \right. \\ - 4 \frac{[-g_2 \cos(\psi_1 - \alpha) + g_3 \sin(\psi_1 - \alpha)]^2 \cos 2\psi_1}{[g_1 + \theta(g_2 \cos \alpha + g_3 \sin \alpha)]^4} - \\ \left. - 2 \frac{[(g_2^2 - g_3^2) \sin(2\psi_1 - 2\alpha) + 2g_2 g_3 \cos(2\psi_1 - 2\alpha)] \sin 2\psi_1}{[g_1 + \theta(g_2 \cos \alpha + g_3 \sin \alpha)]^3} \right\}$$

nella quale ancora la sommatoria su \vec{g} va effettuata su quei valori g_j che soddisfano alla (33).

Integriamo ora la prima delle (34) e la (39) su U^2 e ψ_1 .

L'integrazione su U^2 da 0 a ∞ si effettua semplicemente imponendo la condizione che la sommatoria su \vec{g} è effettuata su quei valori g_j che soddisfano alla disuguaglianza

$$(40) \quad g_1 + \theta (g_2 \cos \alpha + g_3 \sin \alpha) \geq \delta,$$

che si ottiene dalla (33) trascurando il termine $(g_2^2 + g_3^2)/x$, ciò che è lecito per $x \gg 1/\beta^2$.

L'integrazione su ψ_1 da 0 a 2π si esegue analiticamente. Si ottiene così:

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{k}{\sigma N} d\sigma^{(i)} = \left\{ [1 + (1-x)^2] \psi_1(\theta, \delta) - \frac{2}{3} (1-x) \psi_2(\theta, \delta) \right\} dk \\ \frac{k}{\sigma N} [d\sigma_{Lb, P_1}^{(i)} - d\sigma_{Nb, P_1}^{(i)}] = 2(1-x) \psi_3(\theta, \delta), \end{array} \right.$$

essendo:

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_1(\theta, \delta) = 4 \frac{(2\pi)^2 N_0}{\Delta} \sum \frac{|S|^2}{g} \frac{e^{-Ag^2}}{(\beta^2 + g^2)^2} \frac{\delta (g_2^2 + g_3^2)}{[g_1 + \theta (g_2 \cos \alpha + g_3 \sin \alpha)]^2} \\ \psi_2(\theta, \delta) = 24 \frac{(2\pi)^2 N_0}{\Delta} \sum \frac{|S|^2}{g} \frac{e^{-Ag^2}}{(\beta^2 + g^2)^2} \cdot \\ \quad \cdot \frac{\delta^2 (g_2^2 + g_3^2) [g_1 + \theta (g_2 \cos \alpha + g_3 \sin \alpha) - \delta]}{[g_1 + \theta (g_2 \cos \alpha + g_3 \sin \alpha)]^4} \\ \psi_3(\theta, \delta) = -4 \frac{(2\pi)^2 N_0}{\Delta} \sum \frac{|S|^2}{g} \frac{e^{-Ag^2}}{(\beta^2 + g^2)^2} \cdot \\ \quad \cdot \frac{\delta^3 [(g_2^2 - g_3^2) \cos 2\alpha + 2g_2 g_3 \sin 2\alpha]}{[g_1 + \theta (g_2 \cos \alpha + g_3 \sin \alpha)]^4} \end{array} \right.$$

Le sommatorie sono fatte su quei valori di g_j che soddisfano alla (40). Le (41), (42) contengono come caso particolare ($\alpha = g_1 = 0$) le formule già da noi pubblicate in altri lavori (1, 2). La prima delle (41), divisa per dk , ci fornisce la parte coerente della cosiddetta "intensità" della

bremsstrahlung, che è proporzionale al numero $k n(k)$, essendo $n(k)dk$ il numero di fotoni di energia fra k e $k + dk$.

Mediante le (41), (42) si può definire la polarizzazione dell'intero cono di bremsstrahlung, riferita al piano (\vec{b}_1, \vec{p}_1) :

$$P_{b_1 p_1} = \frac{d\sigma_{\perp p_1 b_1}^{(i)} - d\sigma_{\parallel p_1 b_1}^{(i)}}{d\sigma^{(i)} + d\sigma^{(c)}}$$

essendo $d\sigma^{(c)}$ la parte continua della sezione d'urto, già calcolata da Überall⁽⁴⁾.

In questo n. 6 le varie sezioni d'urto non sono da confondere con quelle date ai numeri precedenti, perchè qui esse sono differenziali solo nell'energia del fotone, anzichè essere differenziali anche negli angoli di emissione U e ψ_1 , come nei numeri precedenti.

Dati numerici relativi a queste sezioni d'urto sono già stati da noi pubblicati^(1,2) e perciò non ne riportiamo in questa sede.

Ringraziamo il Dr. R. Buonanni del Servizio Calcoli Numerici dei Laboratori di Frascati per la programmazione dei calcoli.

BIBLIOGRAFIA.

- (1) - G. Barbiellini, G. Bologna, G. Diambrini, and G.P. Murtas, Phys. Rev. Letters 8, 454 (1962); Erratum 9, 46 (1962).
- (2) - G. Barbiellini, G. Bologna, G. Diambrini and G.P. Murtas, Phys. Rev. Letters 9, 396 (1962).
- (3) - H. Überall, Phys. Rev. 107, 223 (1957).
- (4) - H. Überall, Phys. Rev. 103, 1055 (1956).
- (5) - G. Barbiellini, G. Bologna, G. Diambrini and G.P. Murtas, Phys. Rev. Letters 8, 112 (1962).
- (6) - M. May, Phys. Rev. 84, 265 (1951).
- (7) - L.I. Schiff, Phys. Rev. 83, 252 (1951).
- (8) - J. Bouman, Hand. d. Physik (Springer Verlag, Berlin 1957), vol. 32, pag. 97.
- (9) - J.M. Bijvoet, N.H. Kolkmeier, C.H. MacGillavry: X-ray analysis of crystals (Butterworth 1951), pagg. 64 e 239.
- (10) - L.I. Schiff, Quantum mechanics (MacGraw-Hill, New York 1955), pag. 51.
- (11) - L.D. Landau, E.M. Lifshitz: Quantum mechanics (Pergamon Press, London 1958), pag. 18.

FIG. 2 - Rappresentazione delle funzioni $\delta\phi_{1,2,3}^0$, ottenute dalle formule (35), per $g_1 = 0$ (piano passante per l'origine dello spazio reticolare inverso). Caso del Diamante a temperatura ambiente, orientato con l'asse $\vec{b}_1 \equiv [110]$ all'angolo θ con l'impulso \vec{p}_1 dell'elettrone incidente. Si è assunto $\vec{b}_2 \equiv [001]$. In ascissa è riportato il rapporto $\zeta = \theta/\delta$ (δ minimo impulso trasferito al nucleo).

Le varie figure 2 a-g si riferiscono a diversi valori dei parametri $\alpha = \angle(\vec{b}_1, \vec{b}_2)(\vec{b}_1, \vec{p}_1)$, $U = \theta_1 E_1$ ($\theta_1 = \angle(\vec{k}, \vec{p}_1)$, angolo di emissione del fotone), e $\psi_1 = \angle(\vec{p}_1, \vec{k})(\vec{p}_1, \vec{b}_1)$.

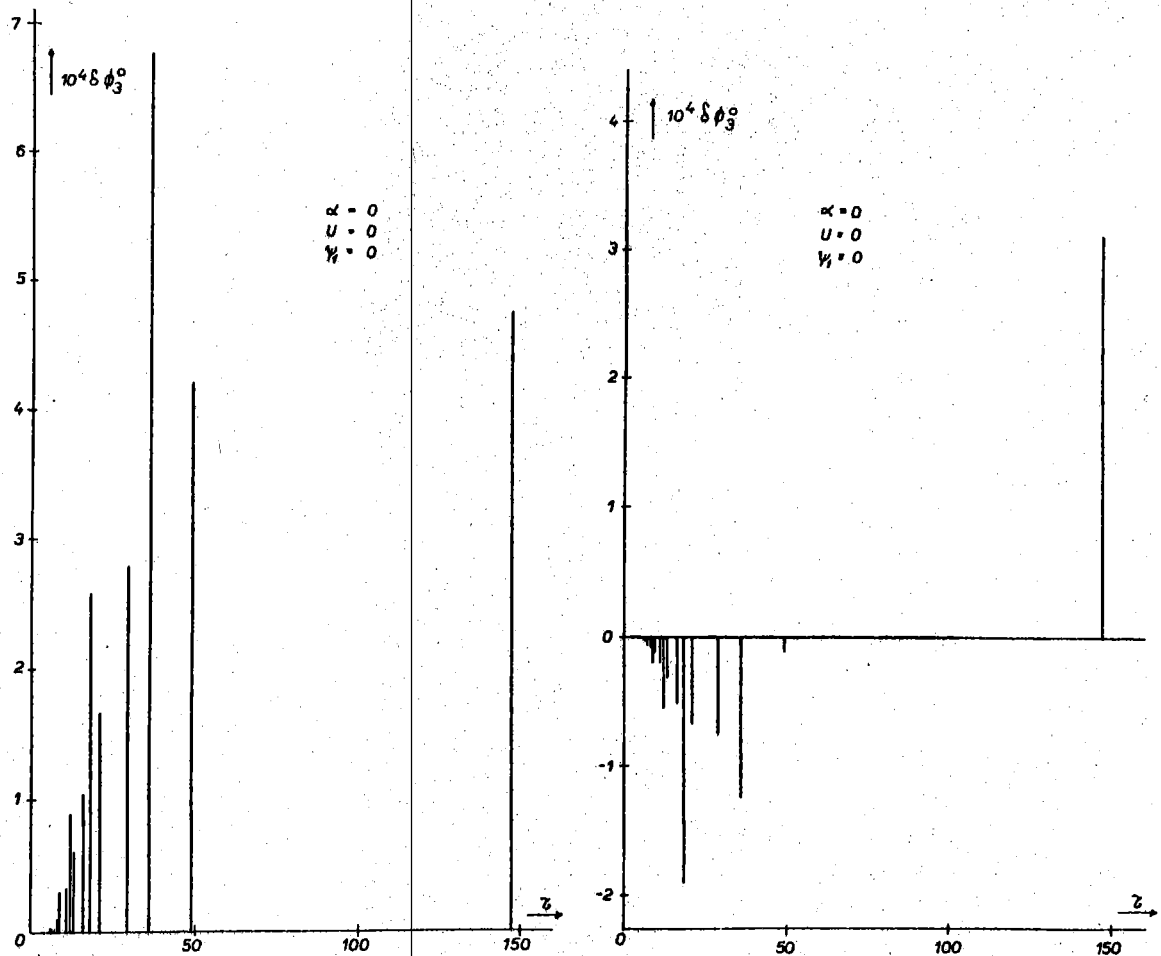


FIG. 2a

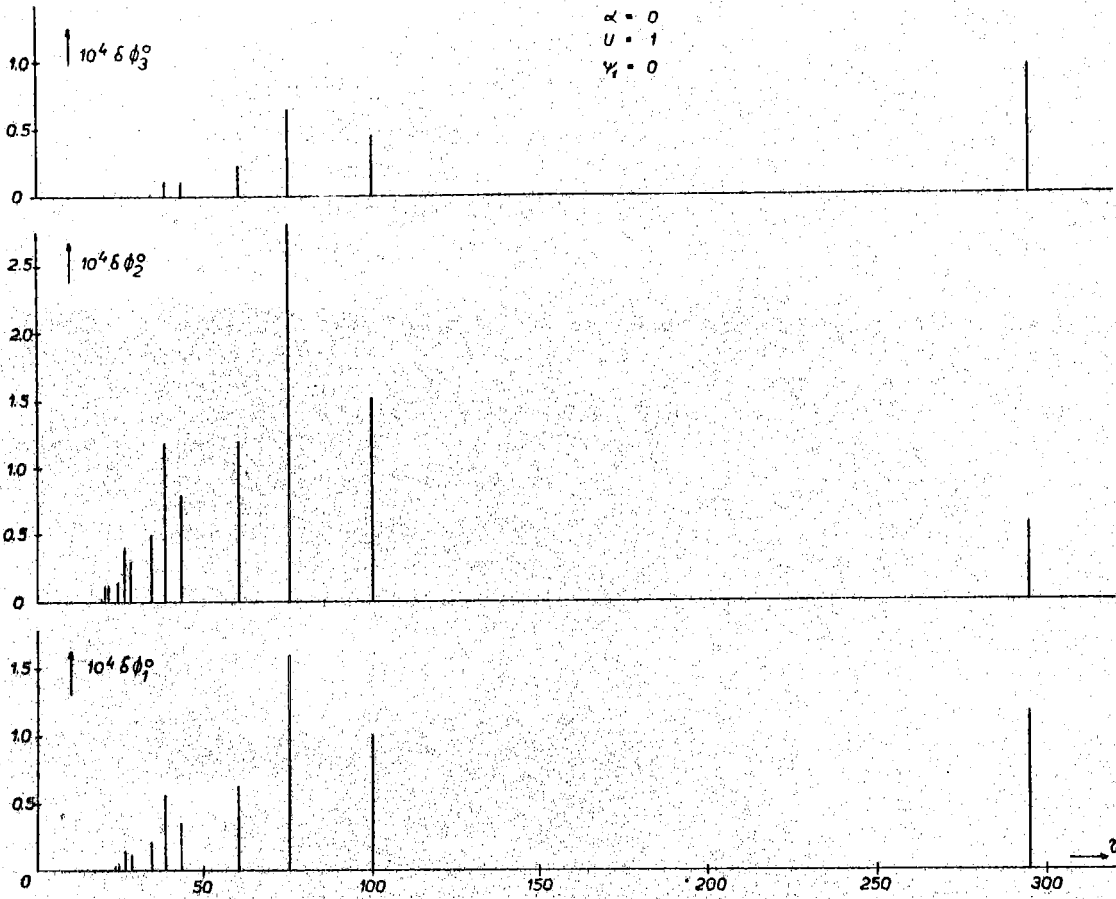


FIG. 2 b

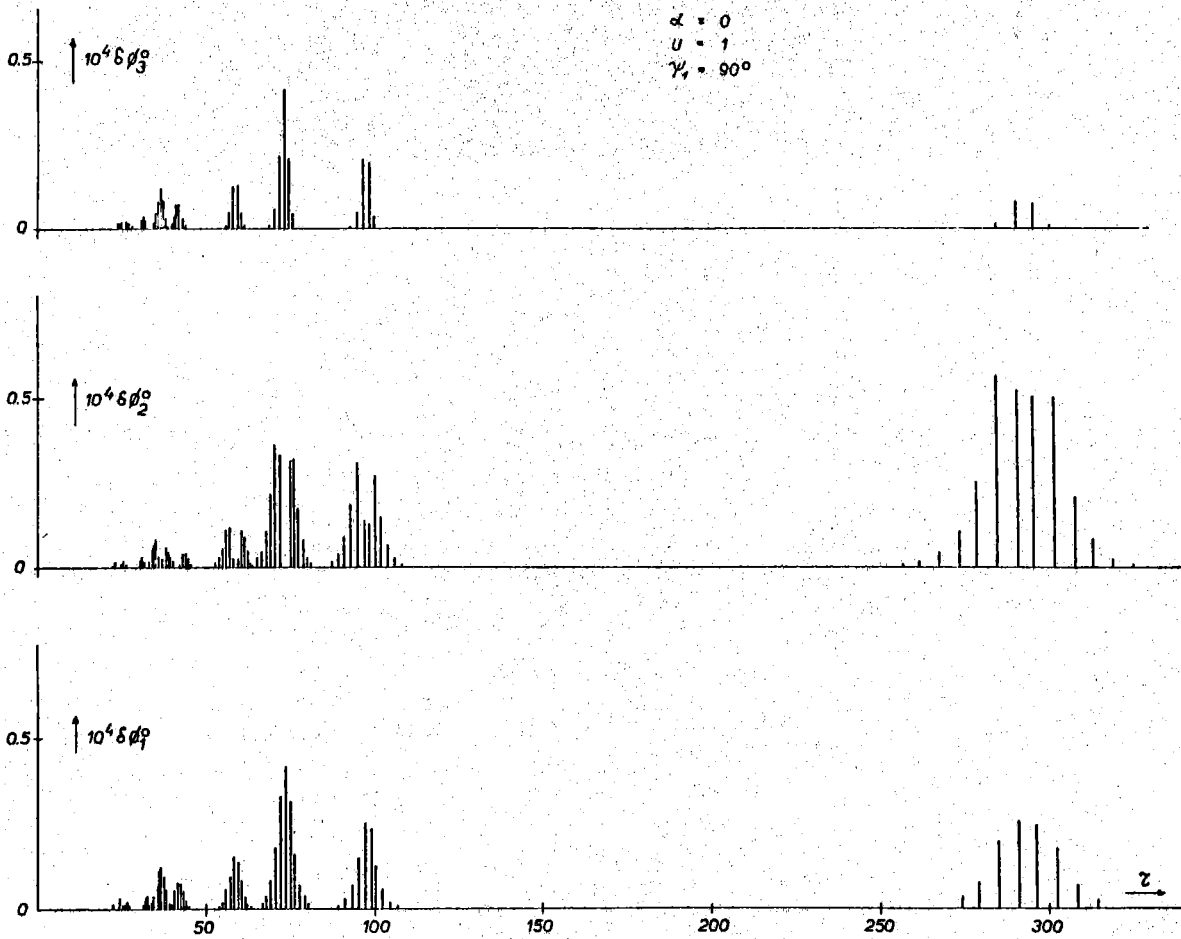


FIG. 2 c

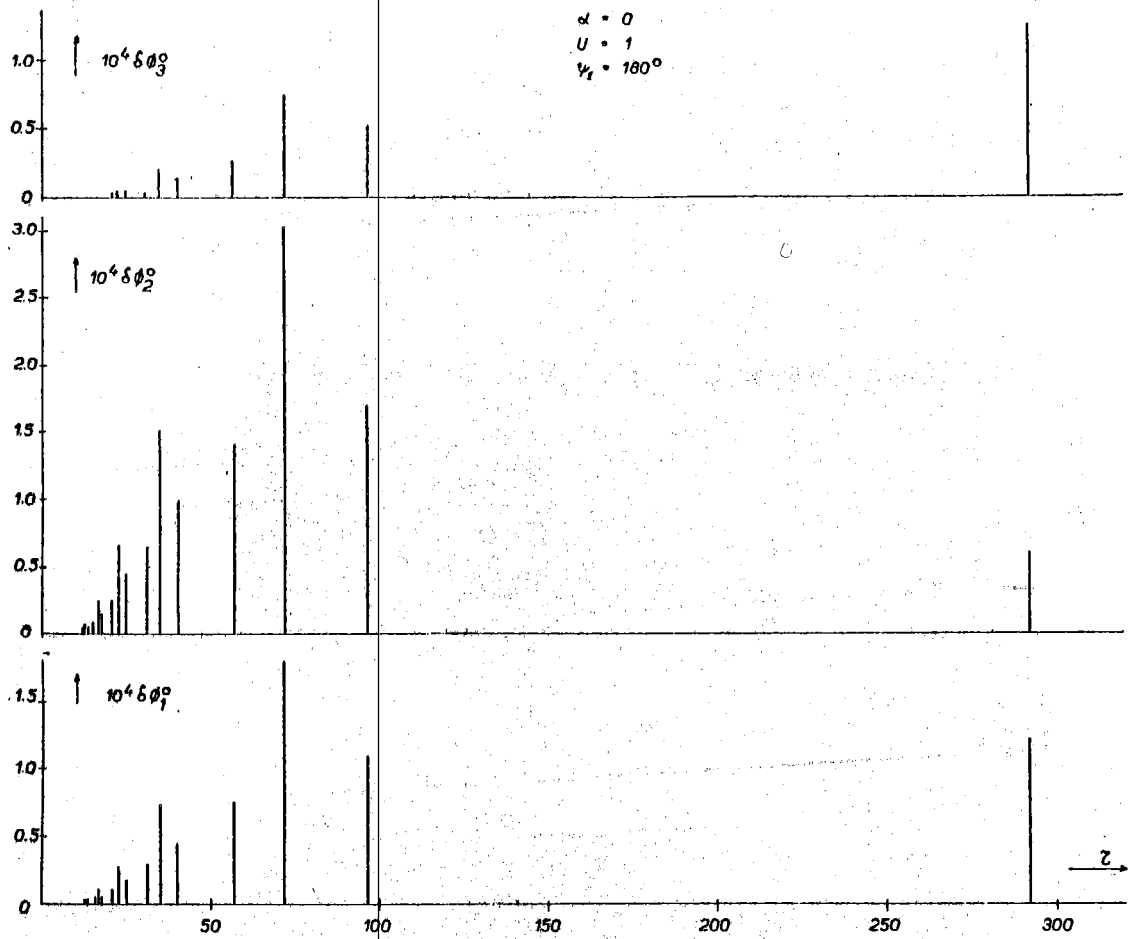


FIG. 2d

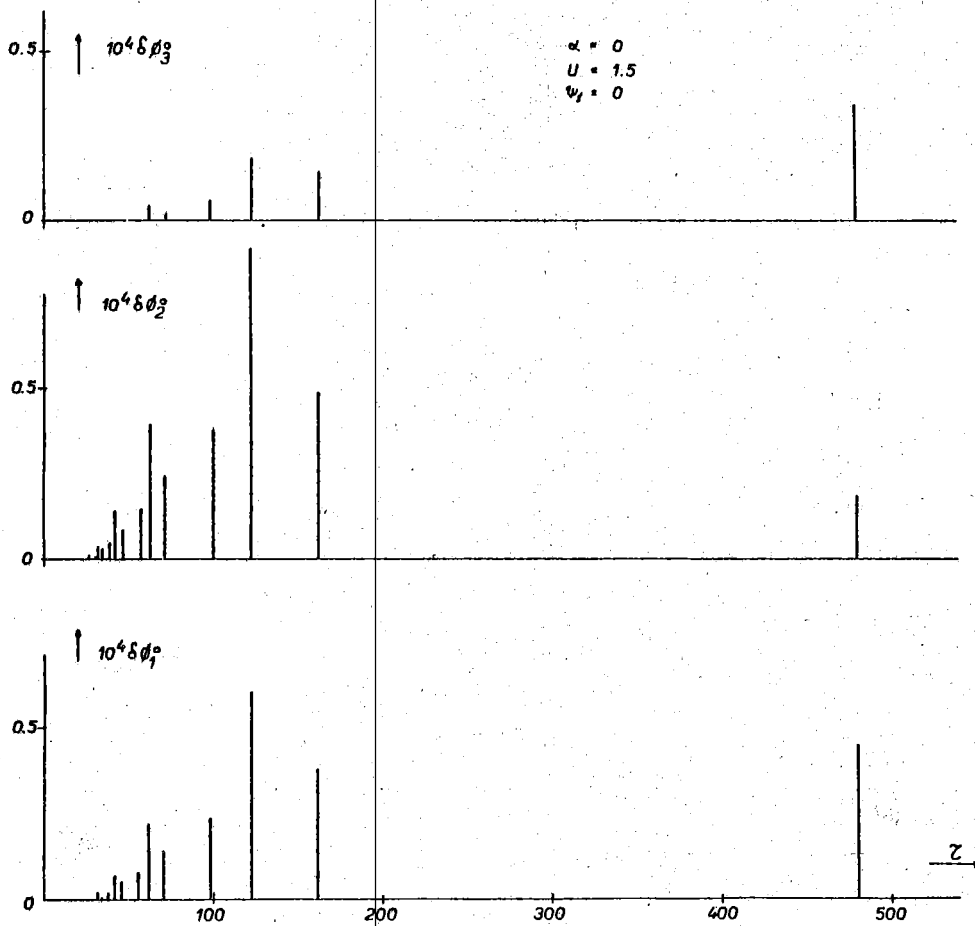


FIG. 2e

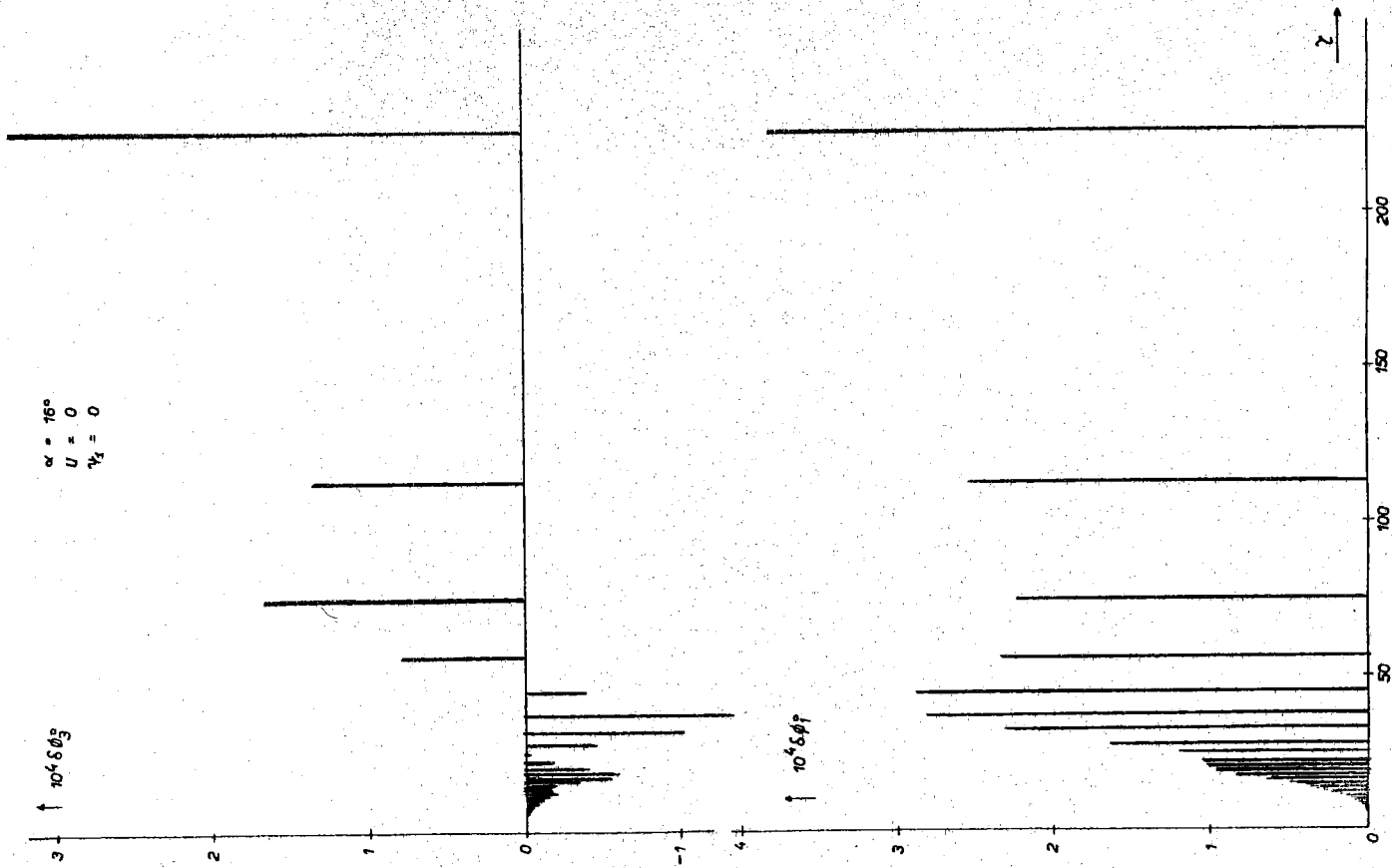


FIG. 27

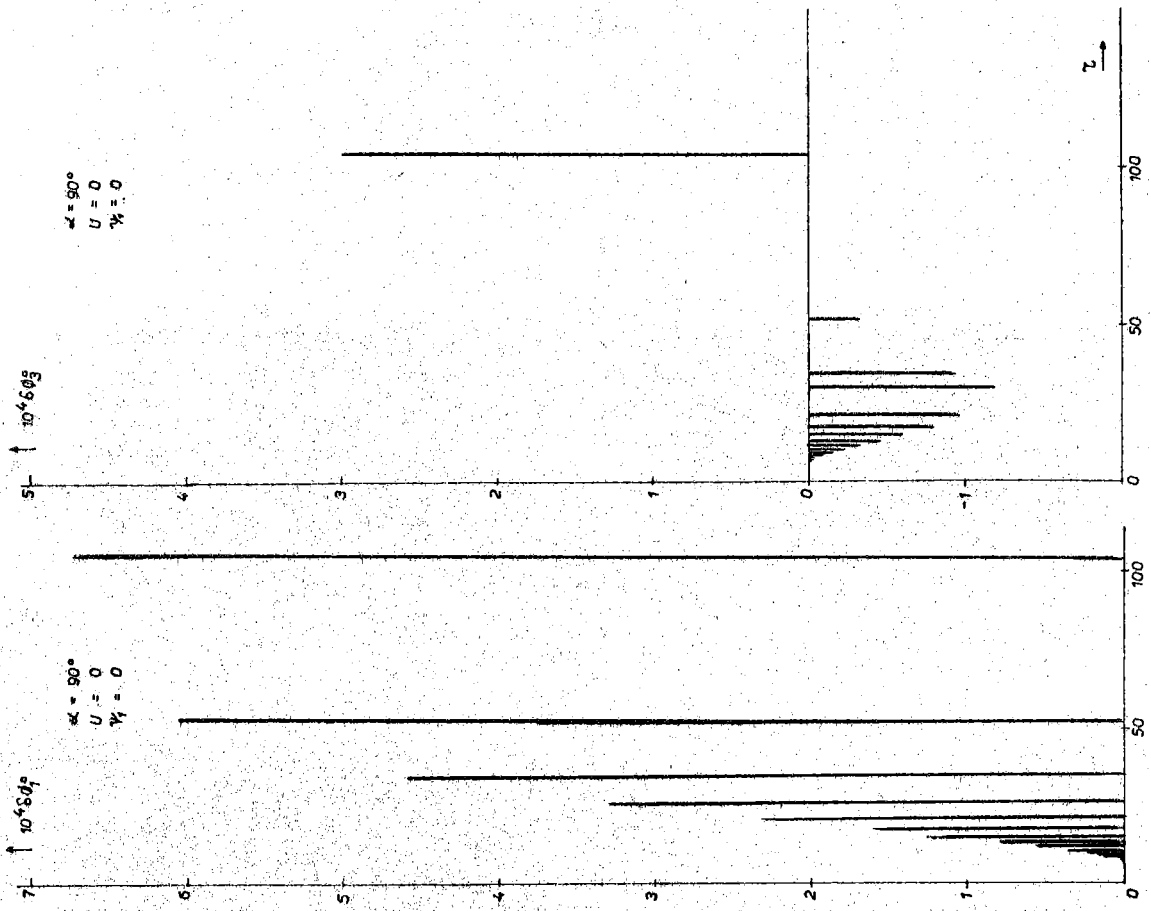


FIG. 29

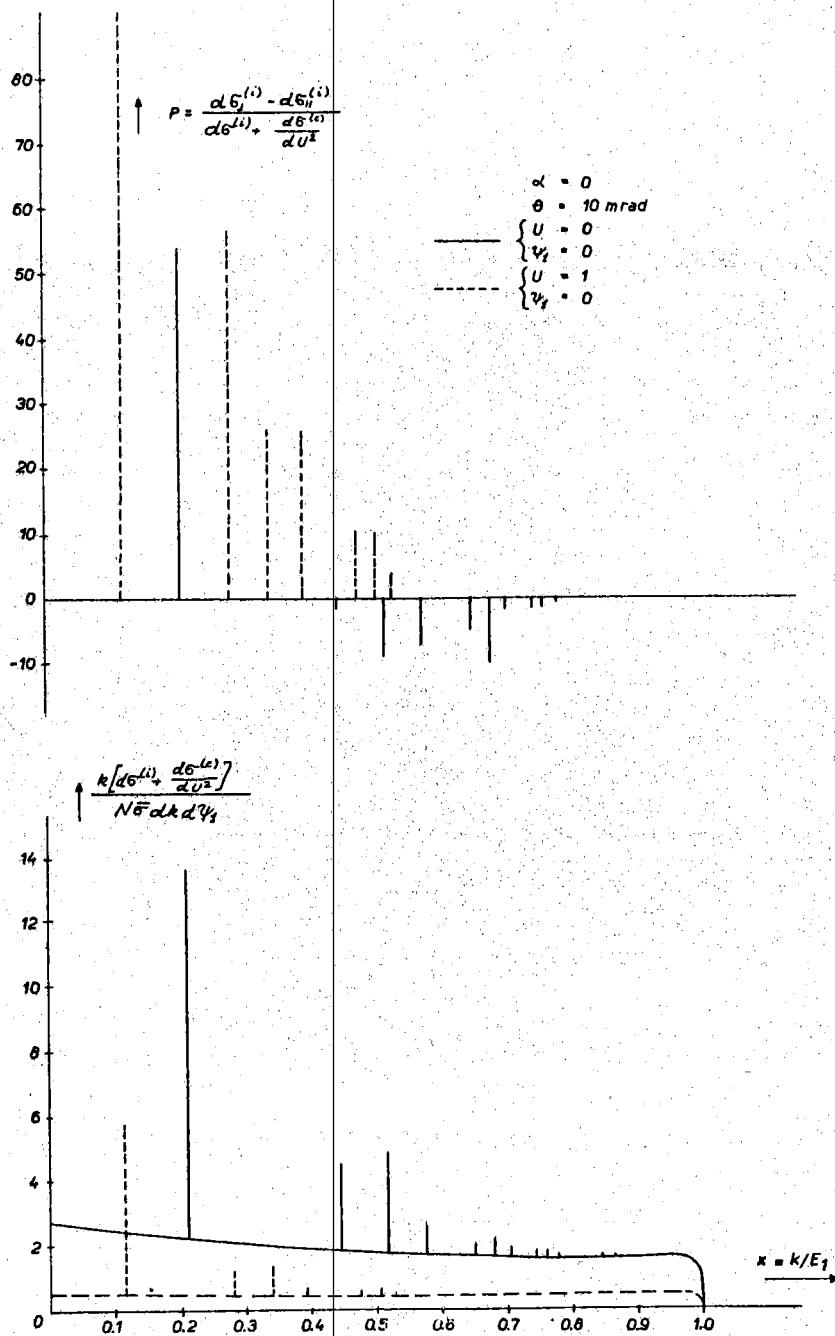


FIG. 3 - Spettro differenziale dei fotoni e sua polarizzazione P ottenuta mediante le formule (34), (35) e tenendo conto anche della parte continua $d\sigma^{(c)}$ della sezione d'urto, data da Überall⁽³⁾. Le condizioni sono quelle della fig. 2. La polarizzazione è riferita al piano di emissione (\vec{p}_1, \vec{k}) del fotone, tranne per $U = 0$, caso in cui è riferita al piano (\vec{p}_1, \vec{b}_1). In ascissa è riportata l'energia frazionaria del fotone $x = k/E_1$, per elettroni di 1 GeV ($E_1 = 1961$). Si è preso $\theta = 10$ mrad, $\alpha = 0$, $\psi_1 = 0$. Le curve continue sono relative a $U = 0$, quelle tratteggiate ad $U = 1$.